**Universidad de la República** **Matemática Discreta 1**
**Facultad de Ingeniería**
**Instituto de Matemática y Estadística** **Primer semestre 2024**

PRÁCTICO 1: INDUCCIÓN COMPLETA

**Ejercicio 1.** Probar de dos formas distintas que

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

para todo natural $n$.

**Ejercicio 2.** Probar que

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo natural $n$.

**Ejercicio 3.** Probar que

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=0}^{n} i\right)^2$$

para todo natural $n$.

**Ejercicio 4.** Probar que $n^2 \geq n+1$ para todo $n \geq 5$.

**Ejercicio 5.** Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural $n_0$ que se debe encontrar.

**Ejercicio 6.** Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural $n$.

**Ejercicio 7.** Probar que para todo natural $n$ existe un natural $k$ tal que $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9k$.

**Ejercicio 8.** Sea $n$ un número natural tal que $n \geq 1$. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

**Ejercicio 9.** Probar que si $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ y $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n \, \forall n \geq 1$ entonces $a_n \geq 3^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^+$.

**Ejercicio 10.** Demostrar que, a partir de un segmento de longitud 1 en el plano, es posible construir con regla y compás un segmento de longitud $\sqrt{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}^+$.

**Ejercicio 11.** Probar que todo número natural mayor que 1 se puede expresar como producto de números primos.

**Ejercicio 12.** Probar que el Principio del Buen Orden implica el Principio de Inducción Completa sobre los números naturales.